I. Série entière; rayon de convergence.

A. Définitions, premières propriétés.

Def 1: On appelle **série entière** toute série d'applications $\sum_{n\geq 0}\left(f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\right)$ telle qu'il existe une suite complexe $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tq : ∀n∈N, ∀z∈ℂ, $f_n(z)=a_n z^n$.

Une fonction polynôme est une série entière.

Prop 1: (**Lemme d'Abel**). Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une S.E., $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ tq. $\left(a_n\rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

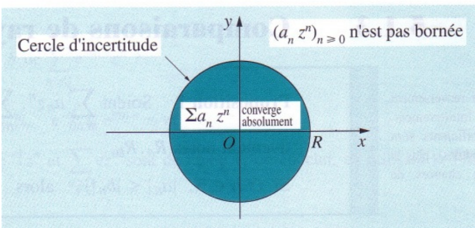
Alors, pour tout z∈ℂ tq. $|z|<\rho$, on a: $a_n z^n \underset{n\infty}{=} O\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$,

et, en particulier, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est ABS. CV.

Th-Def 2: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une SE. $\exists! R\in\overline{\mathbb{R}_+}=[0;+\infty]$ tq:

$$\forall z\in\mathbb{C},\begin{cases}|z|<R\Rightarrow\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ Cv. ABS.}\right)\\ |z|>R\Rightarrow\left(\left(a_n z^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée}\right)\end{cases}$$

Cet élément $R\in\overline{\mathbb{R}_+}$ est appelé **rayon de convergence** de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.



Exemples:

$\sum_{n\geq 0} z^n$. R=1, et la série DV sur le cercle d'incertitude.

$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$. R=1, et la série DV en 1, mais Cv en tout autre point du cercle d'incertitude.

$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$. R=1, et la série Cv sur tt le cercle d'incertitude.

Les ptés ci-dessus ne rendent pas facile le calcul de R

B. Calcul du rayon de convergence.

Prop 2: **Comparaison des rayons.** Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE de rayons respectifs R_a et R_b.

Si $\left(\forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leq |b_n|\right)$, alors $R_a\geq R_b$.

Si $\left(\forall n\in\mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{=} O\left(b_n\right)\right)$, alors $R_a\geq R_b$.

Si $\left(\forall n\in\mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n\right)$, alors $R_a=R_b$.

Exemples: $\sum_{n\geq 0} e^{\sin n} z^n$; R=1.

$\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)z^n$; R=1

Prop 3: **Règle de D'Alembert.** Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une SE.

S'il existe N∈ℕ tq: $\begin{cases}\forall n\geq N, a_n\neq 0\\ \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)\xrightarrow{\text{admet une limite}} l\in\overline{\mathbb{R}_+}\end{cases}$

Alors $R=\frac{1}{l}$, avec $\frac{1}{0}=\infty$ et $\frac{1}{\infty}=0$.

Application: Si les coefs de la SE sont des fractions rationnelles: ∀n, a_n = F(n), alors R=1.

C. Opérations sur les SE.

Prop 4: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE.

On considère $\sum_{n\geq 0}\left(a_n+b_n\right)z^n$ la **série somme.**

Alors $R_{a+b}\geq Min\left(R_a,R_b\right)$, égalité si $R_a\neq R_b$.

Exemple: $\sum_{n\geq 0} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} -z^n$ sont de rayon 1, et leur série somme $\sum_{n\geq 0} 0z^n$ est de rayon ∞.

Def 3: On appelle **SE dérivée** d'une SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la SE définie par: $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Prop 5: la SE et la SE dérivée ont **même rayon de cv.**

Remarque: on a encore le même ry. cv. pour la Se primitive $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$.

II. Somme, propriétés de la somme.

Def 4: On appelle **somme** de la SE l'application $S:\{z\in\mathbb{C};|z|<R\}\to\mathbb{C}$ définie par: $S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exemple: Série géom. $|z|<1\Rightarrow s(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$

Lemme: $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ C.N sur tout compact de D(0;R).

Remarque: Ce n'est pas forcément le cas sur $\overline{D(0;R)}$.

Exple: $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ CN sur $\overline{D(0;1)}$, mais $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ ne CN que sur $D(0;1)$ (i.e. l'intérieur).

Th 2: S est **continue** sur le disque ouvert de convergence.

Exemples: $z\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n.z^n$ est cont. sur $D(0;1)$.

$z\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ est continue sur $\overline{D(0;1)}$.

Application (p.111): $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$.

Prop 6: S est C∞ de $]-R;R[\to\mathbb{C}$, et ∀k∈ℕ,

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}(n)(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

pour tout x∈]-R;R[.

En particulier, ∀k∈ℕ, $a_k=\frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Application: ∀x∈]-1:1[, $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

III. Applications des séries entières.

A. Fonctions développables en série entière.

Def 5: Soient V un vge de 0, $f:V\to\mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière en 0** ssi ∃ une SE $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ de rayon R>0 et un vge U de 0 tq:

$$\forall x\in U\cup V\cap]-R;R[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

Prop 7: Sous les hypothèses précédentes, f est C∞ sur $U\cup V\cap]-R;R[$, et: $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

f DSE en 0, dvt de Mac-Laurin: $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

f DSE en x_0, d de Taylor: $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Exemple: ∀x∈ℝ, $e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$.

B. Applications des DSE.

a) Développements limités, équivalents. (1)

Exemple: Etude de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (406 Ex. C)

b) Application à la résolution d'équa. diffs.

Exemple: Recherche des solutions DSE en 0 de l'eq.df: y" – xy = 0. (M4 p.217).

IV. Notes.

Rapport de jury 2011 *: Un candidat bien inspiré a pensé à proposer plusieurs exemples de séries entières issues des équations différentielles.*

Wikipedia: *En mathématiques et particulièrement en analyse, une série entière est une série de fonctions de la forme* $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ *où les coefficients an forment une suite réelle ou complexe. La série est dite entière du fait qu'elle fait intervenir des puissances entières.*
Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide d'une grandeur associée à la série, son rayon de convergence R. Sur le disque de convergence (disque ouvert de centre 0 et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.
Réciproquement, certaines fonctions indéfiniment dérivables peuvent être écrites au voisinage d'un de leurs points c comme somme d'une série entière de la variable z-c : celle-ci est alors leur série de Taylor. On parle dans ce cas de fonctions développables en série entière au point c. Lorsqu'une fonction est développable en série entière en chacun de ses points, elle est dite analytique. Toute fonction développable en série entière est une fonction de classe C∞. Une fonction analytique est une fonction développable en série entière au voisinage de tout point. Les notions de fonction analytique complexe et de fonction holomorphe coïncident.

Les séries entières apparaissent en analyse, mais aussi en combinatoire en tant que fonction génératrice et se généralisent dans la notion de série formelle. Dans la théorie des nombres, le concept de nombre p-adique est proche de celui de série entière.

(1) ***Wikipedia: DL.*** *C'est une approximation polynomiale d'une fonction en un point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme. En mathématiques, les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.*